



## **Theoretische achtergrond van het mathematisch model van een elastische pijpleiding**

December 2004

Auteur(s)

D. van Duijn

Bron:

Documentatie WANDA software  
© WL | Delft Hydraulics

## Theoretische achtergrond van het mathematisch model van een elastische pijpleiding

In onderstaande toelichting is het mathematisch model van een als elastisch beschouwde leiding met vloeistof beschreven.

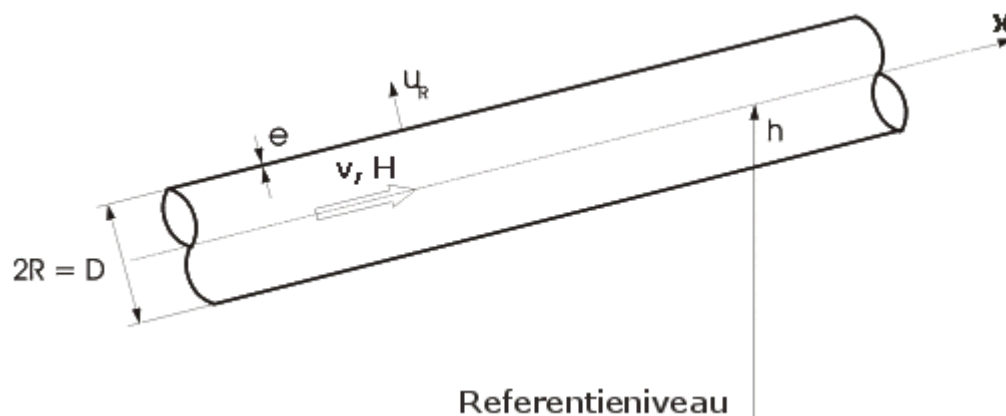
### Leiding (elastisch) model

Elastisch beschouwde leidingen zijn een essentiële component in WANDA. Daarom wordt een volledige beschrijving gegeven van de theorie en oplossingsmethoden. Voor de beschrijving van een isothermische vloeistofstroming door een leiding zijn de volgende twee vergelijkingen van belang:

- Bewegingsvergelijking.
- Continuïteitsvergelijking.

In de waterslagtheorie wordt bij beide vergelijkingen uitgegaan van de gemiddelde snelheid. Met andere woorden: de stroming wordt als één-dimensionaal beschouwd.

Afleiding van deze één-dimensionale vergelijkingen kan in ieder boek over transiënte stroming worden gevonden.



Figuur 1: Definitie van de variabelen

De vergelijkingen zijn (zie ook figuur 1):

$$\text{Beweging: } \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f v |v|}{2D} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Continuïteit: } \frac{\rho_f g}{K_f} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2}{R} + \frac{\partial u_r}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

waarin:

- $v$  = gemiddelde snelheid [m/s]
- $H$  = drukhoogte [m]
- $s$  = axiale coördinaat (langs de leiding) [m]
- $g$  = versnelling van de zwaartekracht [m/s<sup>2</sup>]
- $f$  = friction factor [-]

$D=2R$  = inwendige diameter van de leiding [m]  
 $\rho$  = dichtheid vloeistof [kg/m<sup>3</sup>]  
 $K_f$  = bulk modulus v/d vloeistof [N/m<sup>2</sup>]  
 $u_R$  = radiale verplaatsing van de leidingwand [m]

De drukhoogte  $H$  is gedefinieerd als:

$$H = \frac{p}{\rho_f g} + h \quad (3)$$

Waarin  $p$  de gemiddelde druk van de vloeistof is en  $h$  de hoogte van de hartlijn van de leiding boven een referentieniveau.

### Aannames

De derde term in de bewegingsvergelijking brengt de wrijving tussen vloeistof en leidingwand in rekening. De wrijving is gelijk gemodelleerd alsof de snelheid stationair was. Dit is de gebruikelijke benadering in transiënte stroming en blijkt goed te voldoen.

In de vergelijkingen (1) en (2) zijn de termen  $v \partial v / \partial x$  verwaarloosd. Dit is alleen toegestaan indien  $v$  veel kleiner is dan de voortplantingssnelheid van de drukgolven. Deze aanname staat in de literatuur bekend als de acoustische benadering.

De één-dimensionale beschrijving van de vloeistofstroming is alleen geldig voor drukgolven met een lage frequentie. Je kunt je voorstellen dat wanneer de golflengte van een drukgolf is van eenzelfde grootte als de diameter van de buis, de radiale vloeistoftraagheid van belang wordt. In transiënte stroming zijn de lange golflengten dominant en is een één-dimensionale benadering toelaatbaar. Deze aanname staat in de literatuur bekend als de lange golflengte benadering.

### Continuïteitsvergelijking

De continuïteitsvergelijking (2) kan worden getransformeerd in een meer hanteerbare vorm. Daarvoor gebruiken we voor de leiding de spannings-rek relatie:

$$\frac{u_R}{R} = \frac{1}{E} (\sigma_\phi - \nu \sigma_x) \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_\phi)$$

of:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \nu \frac{u_R}{R} \right) \quad (5)$$

$$\sigma_\phi = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{u_R}{R} + \nu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)$$

waarin:

$E$  = Young's modulus [N/m<sup>2</sup>]

- $\nu$  = Poisson's ratio [-]  
 $x$  = axiale spanning in de leidingwand [N/m<sup>2</sup>]  
 $\phi$  = tangentiële spanning in de leidingwand [N/m<sup>2</sup>]

Door middel van de spannings-rek relaties kan de continuïteitsvergelijking als volgt worden uitgedrukt:

$$\frac{\rho_f}{K_f} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2}{gE} \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial t} - \frac{2\nu}{gE} \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

Deze vergelijking kan worden vereenvoudigd door toepassen van de lange golglengte benadering. Deze benadering houdt in dat de radiale traagheid van de buiswand kan worden verwaarloosd. Wanneer deze benadering wordt toegepast, kan een belangrijke vergelijking worden afgeleid:

$$\sigma_\phi = \frac{PR}{e} \quad (7)$$

In feite geeft deze vergelijking aan dat de krachten in radiale richting altijd in evenwicht zijn. Er zijn geen dynamische effecten bij betrokken.

Sustitueren van vergelijking (7) in (6) geeft:

$$\frac{\rho_f}{K_f} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2R}{gEe} - \frac{2\nu}{gE} \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

De druk  $p$  kan worden uitgedrukt als functie van  $H$  door middel van de vergelijking (3):

$$p = \rho_f g(H - h)$$

zodat: 
$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho_f g \left( \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial t} \right)$$

In deze vergelijking verwaarlozen we de invloed van  $\partial h / \partial t$  op  $\partial p / \partial t$ . Dit is toegestaan doordat we de verplaatsingen van de leiding als klein ten opzichte van de diameter beschouwen.

Aldus ontstaat:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho_f g \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right) \quad (9)$$

Substitutie van (9) in (8) levert de volgende continuïteitsvergelijking op:

$$\frac{1}{c_f^2} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2\nu}{gE} \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

met 
$$c_f^2 = \frac{K_f}{\rho_f} \left( 1 + \frac{DK_f}{Ee} \right)^{-1}$$

waarin:

$c_f$  = voortplantingssnelheid drukgolf [m/s]  
 $K_f$  = compressibiliteit vloeistof [N/m<sup>2</sup>]  
 $\rho$  = dichtheid vloeistof [kg/m<sup>3</sup>]  
 $D$  = inwendige leidingdiameter [m]  
 $E$  = Young's modulus (elasticiteit leiding) [N/m<sup>2</sup>]  
 $e$  = wanddikte leiding [m]

Vanzelfsprekend kan  $v$  door  $Q/A_f$  worden vervangen om de vergelijkingen in termen van debiet  $Q$  en drukhoogte  $H$  uit te drukken. De laatste term in de continuïteitsvergelijking brengt het Poisson-effect in rekening. Deze term tezamen met alle traagheidseffecten van de leidingwand (radiaal en axiaal) wordt in de klassieke waterslagtheorie weggelaten.

### Samenvatting

De twee basisvergelijkingen die als functie van  $Q$  en  $H$  de compressibele stroming in een leiding beschrijven zijn:

Beweging:

$$\frac{1}{A_f} \frac{\partial Q}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f Q |Q|}{2 D A_f^2} = 0$$

Continuïteit:

$$\frac{1}{c_f^2} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{g A_f} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

met: 
$$c_f^2 = \frac{K_f}{\rho_f} \left( 1 + \frac{D K_f}{E e} \right)^{-1}$$

$c_f$  geeft de voortplantingssnelheid van een drukgolf door de leiding. Dit zal verder worden toegelicht.

### De karakteristiekenmethode

Wanneer we  $H$  en  $Q$  als onafhankelijke variabelen beschouwen, vormen de basisvergelijkingen een set van hyperbolische partiële differentiaalvergelijkingen. Deze hyperbolische set kan worden, die we kunnen uitdrukken in C+ and C- vergelijkingen:

$$\frac{dH}{dt} + \frac{c_f}{g A_f} \frac{dQ}{dt} + \frac{f c_f}{2 g D A_f^2} Q |Q| = 0 \quad \text{C+} \quad (11)$$

$$\frac{ds}{dt} = +c_f \quad (12)$$

$$\frac{dH}{dt} - \frac{c_f}{g A_f} \frac{dQ}{dt} - \frac{f c_f}{2g D A_f^2} Q|Q| = 0 \quad \text{C-} \quad (13)$$

$$\frac{ds}{dt} = -c_f \quad (14)$$

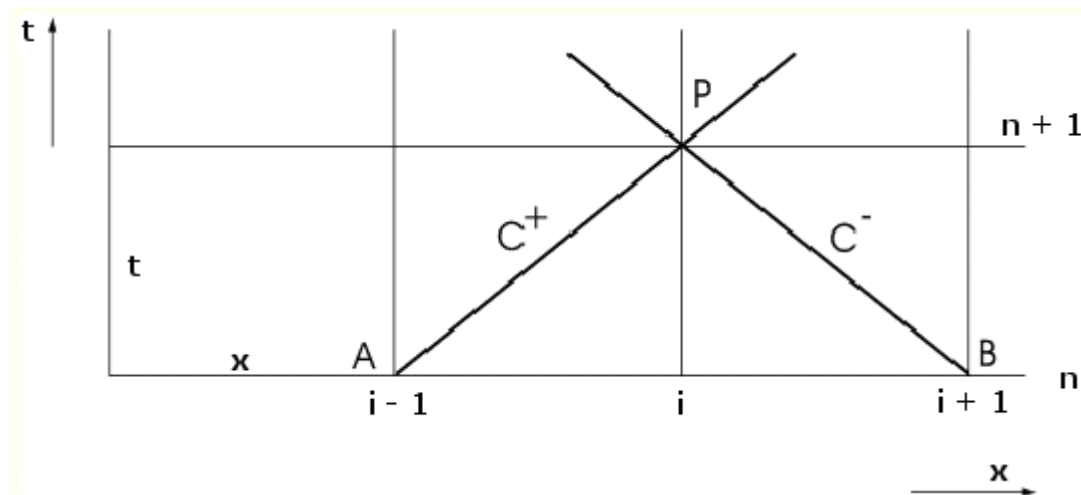
Deze vergelijkingen zijn gewoonlijk de compatibiliteitsvergelijkingen genoemd. Het moet worden benadrukt dat iedere oplossing van deze set een oplossing van de oorspronkelijke set is. Er zijn dus geen mathematische benaderingen gebruikt.

### Eindige differentie vergelijkingen

Om de eindige differentie vergelijkingen af te leiden, wordt een leiding opgedeeld in gelijke stukken met een lengte  $ds$ . De gekozen tijdstap wordt gelijk aan:

$$dt = ds/c_f$$

De vergelijkingen (12) en (14) kunnen worden vertegenwoordigd door rechte lijnen zoals in figuur 2.



Figuur 2: Het  $x - t$  vlak met de karakteristieke lijnen  $C+$  and  $C-$

Wanneer  $H$  and  $Q$  in de punten  $A$  and  $B$  bekend zijn, kunnen we de vergelijkingen (11) en (13) integreren langs de karakteristieke lijnen naar punt  $P$ . Na integratie kunnen de onbekenden  $H$  and  $Q$  in punt  $P$  in principe worden opgelost.

Integratie geeft:

$$C+ : \int_A^P \frac{dH}{dt} dt + \frac{c_f}{g A_f} \int_A^P \frac{dQ}{dt} dt + \frac{f c_f}{2g D A_f^2} \int_A^P Q|Q| dt = 0 \quad (15)$$

$$C- : \int_B^P \frac{dH}{dt} dt - \frac{c_f}{g A_f} \int_B^P \frac{dQ}{dt} dt - \frac{f c_f}{2g D A_f^2} \int_B^P Q|Q| dt = 0 \quad (16)$$

De eerste twee termen in de vergelijkingen kunnen eenvoudigweg worden geïntegreerd. Voor de wrijving in de laatste term van  $Q$  wordt een eerste orde benadering gebruikt.

Integratie geeft (bovenste index de tijd, de onderste index de plaats):

$$H_i^{n+1} - H_{i-1}^n + R(Q_i^{n+1} - Q_{i-1}^n) + S Q_{i-1}^n |Q_{i-1}^n| = 0 \quad \text{C+} \quad (17)$$

$$H_i^{n+1} - H_{i+1}^n - R(Q_i^{n+1} - Q_{i+1}^n) - S Q_{i+1}^n |Q_{i+1}^n| = 0 \quad \text{C-} \quad (18)$$

waarin:

$$R = \frac{c_f}{g A_f}; \quad S = \frac{f c_f \Delta t}{2 g D A_f^2}$$

Dan kan  $H_i^{n+1}$  worden uitgedrukt in termen van alle andere variabelen. Aldus:

$$H_i^{n+1} = C_{i-1} - R Q_i^{n+1} \quad \text{C+} \quad (19)$$

$$H_i^{n+1} = C_{i+1} + R Q_i^{n+1} \quad \text{C-} \quad (20)$$

waarin:

$$C_{i-1} = H_{i-1}^n + R Q_{i-1}^n - S Q_{i-1}^n |Q_{i-1}^n| \quad (21)$$

$$C_{i+1} = H_{i+1}^n - R Q_{i+1}^n + S Q_{i+1}^n |Q_{i+1}^n| \quad (22)$$

$C_{i-1}$  en  $C_{i+1}$  zijn beide een functie van de variabelen op tijdstip  $t_n$ .